30/11/2018

$T: V^n \to W^m$ γραμμική απεικόνιση

$\dim V = n$, $\dim W = m$

$\ker T = \{ v \in V : T(v) = \bar{0}_w \}$

$T : 1\text{-}1 \Leftrightarrow \ker T = \{\bar{0}_v\}$

Εικόνα $\leftarrow$ $\mathrm{Im}\,T \leq W$

π.χ. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$T(v) = 0$ (Μια γραμμική απεικόνιση δεν διατηρεί τις βάσεις) $T(\mathbb{R}^n) = \{\bar{0}\} \leq \mathbb{R}^m$

<u>Πρόταση</u>

Έστω $T, T' : V^n \to W^m$ γραμμική απεικόνιση. Αν $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ και $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$ είναι βάσεις και $T(v_i) = T'(v_i)$ για όλα τα $i = 1, \dots, n$ τότε $T(v) = T'(v)$. Δηλαδή είναι ίσες.

Απόδειξη

Πρέπει για το τυχαίο v να ισχύει $T(v)=T'(v)$

$v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n \Rightarrow T(v)=T(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=$
$\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)=\alpha_1 T'(v_1)+\dots+\alpha_n T'(v_n)=$
$=T'(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=T'(v)$

Θεώρημα

Έστω V^n και W^n δ.χ. Αν τα σύνολα $\{v_1,\dots,v_n\}$ και $\{w_1,\dots,w_n\}$ αποτελούν βάσεις των V και W, τότε $\exists$ μοναδική γραμμική απεικόνηση $T:V\to W$ με $T(v_i)=w_i$ για όλα τα $i=1,\dots,n$

Απόδειξη

Ορίζουμε την $T:V\to W$ να έχει τύπο $T(v_i)=w_i$ και $T(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=\alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)=$
$=\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_n w_n$

Η T είναι γραμμική διότι έτσι ορίστηκε
Η T είναι 1-1 και επί
Η T είναι ισομορφισμός
T 1-1 $\Leftrightarrow \ker T=\{\bar{0}_v\}$

$T(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)=\bar{0}_W \Leftrightarrow \alpha_1 T(v_1)+\dots+\alpha_n T(v_n)=\bar{0}_W$
$\Leftrightarrow \alpha_1 w_1+\dots+\alpha_n w_n=\bar{0}_W \Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_n=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=\bar{0}_v$

γρ. ανεξ.

Δηλαδή $\ker T=\{\bar{0}_v\}$

Επί $\Leftrightarrow T(v)=w \Leftrightarrow \forall w\in W\ \exists v\in V$ με $T(v)=w$
Έστω $w=\beta_1 w_1+\dots+\beta_n w_n=\beta_1 T(v_1)+\dots+\beta_n T(v_n)=$
$=T(\beta_1 v_1+\dots+\beta_n v_n)$

Ορίζουμε $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$. Τότε $T(v) = w$
Άρα T είναι $\cong$

Πόρισμα:

Δύο ισοδιάστατοι δ.χ. V και W είναι ισόμορφοι μεταξύ τους.

Πόρισμα:
Αν $\dim V = n$ τότε $V \cong \mathbb{R}^n$

Πόρισμα:

Έστω V και W δ.χ., τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα
1) $V \cong W$ 2) $\dim V = \dim W$

Θεώρημα: Έστω V^n και W^m δ.χ. και $T: V \to W$ γραμμική απεικόνιση. Τότε $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$

Απόδειξη: $T: V^n \to W^n$ και έστω $\dim \operatorname{Ker} T = k$
τότε $k \leq n$
Έστω $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ βάση του $\operatorname{Ker} T$. Αυτή επεκτείνεται σε βάση του V $\langle u_1, \dots, u_{n-k}, v_1, \dots, v_k \rangle$

Έστω v τυχαίο στον V
$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{n-k} u_{n-k} + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$
$T(v) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{n-k} T(u_{n-k}) + \cancelto{0}{\beta_1 T(v_1)} + \dots + \cancelto{0}{\beta_k T(v_k)}$

$\to$ Επειδή είναι από τον πυρήνα

$= \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{n-k} T(u_{n-k}) \in T(V)$

Δηλαδή κάθε στοιχείο της εικόνας γράφεται σαν εικόνα από γραμμικούς συνδιασμούς στοιχείων του $\{u_1, \dots, u_{n-k}\}$

Δηλαδή $T(V) = \langle T(u_1), \dots, T(u_{n-k}) \rangle$

Θα δ.ο. $\{T(u_1), \dots, T(u_{n-k})\}$ είναι γραμμικά ανεξ.

Υποθ. ότι δεν είναι. Άρα $\exists\, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-k} \in \mathbb{R}$ ώστε

$\gamma_1 T(u_1) + \dots + \gamma_{n-k} T(u_{n-k}) = \bar{0}_W$

$T(\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{n-k} u_{n-k}) = \bar{0}_W \Rightarrow \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{n-k} u_{n-k} \in \ker T$

Αυτά όμως επεκτείναν την βάση του πυρήνα.

Άρα $\gamma_1 = \dots = \gamma_{n-k} = 0$

Άρα $\{T(u_1), \dots, T(u_{n-k})\}$ είναι γραμμικώς ανεξ.

$\dim V = n = n-k+k = \dim T(V) + \dim \ker T$

Παρατήρηση

1) Για να βρείς την εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης πρέπει να βρείς βάση του πυρήνα και να την επεκτείνεις σε βάση του χώρου. Οι εικόνες των επιπλέον διανυσμάτων σου δίνουν τη βάση του χώρου.

2) $V = \ker T \oplus \underbrace{\langle u_1, \dots, u_{n-k} \rangle}_{\ker T^c}$

Ορισμός: Αν $V = W_1 \oplus W_2$, τότε το ευθύ συμπλήρωμα W_2 του W_1 συμβολίζεται W_1^c

Λήμμα: Έστω $T: V \to W$ γραμ. απεικ. $\dim V = \dim W = n$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

1) T είναι ισομορφισμός
2) T είναι μονομορφισμός
3) T είναι επιμορφισμός
4) η T απεικονίζει βάσεις σε βάσεις.

$$V^n \cong \mathbb{R}^n$$

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = S \quad \langle e_1, \dots, e_n \rangle$$

συγκεκριμένη βάση $\qquad$ κανονική βάση

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \to a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Δημιουργούμε μια αναπαράσταση των στοιχείων του V ως προς τη βάση S με τους αντίστοιχους συντελεστές $(a_1, \dots, a_n)$. Έχουμε $(a_1, \dots, a_n) \to a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Παρένθεση

Δίνονται κ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$: $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ..., $(a_{k1}, \dots, a_{kn})$

Έστω W ο υπόχωρος που γεννάται από αυτά τα διανύσματα.

Πως θα βρούμε μια βάση του;

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

Οι γραμμοπράξεις δεν αλλάζουν τον υπόχωρο W

Με γραμμοπράξεις ο αρχικός πίνακας A θα φτάσει στον ανηγμένο κλιμακωτό

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι μη μηδενικές γραμμές του ανηγμ. κλ. θα μας δώσουν τη ζητούμενη βάση.

π.χ. $P_3 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle \cong \mathbb{R}^4$

$Y = \langle 1+x+x^2+x^3, 2-x+2x^2+x^3, 3+6x+3x^2+4x^3 \rangle$

Να βρεθεί μια βάση του Y.

Χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση της κανονικής βάσης του P_3 και $\mathbb{R}^4$

$1+x+x^2+x^3 \to 1\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 + 1\cdot x^3 \to 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3 + 1\cdot e_4 = (1,1,1,1)$

$2-x+2x^2+x \to (2,-1,2,1)$

$3+6x+3x^2+4x^3 \to (3,6,3,4)$

Γράφω τον αντίστοιχο πίνακα και βρίσκω τον τον ανηγμένο κλιμακωτό.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο υπόχωρος $\mathbb{R}^4$ που δημιουργείται από τα $(1,1,1,1)$ και $(3,6,3,4)$ έχει βάση τα $(1,0,1,2/3)$ και $(0,1,0,1/3)$.

Άρα, ο αντίστοιχος υπόχωρος Y του P_3 έχει βάση την:

$1\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + \frac{2}{3}x^3$ και $0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + \frac{1}{3}x^3$

Δηλαδή $Y = \langle 1 + x^2 + 2/3\, x^3,\ 1x + \frac{1}{3}x^3 \rangle$

$S = \{v_1, \dots, v_n\}$ βάση $\quad S' = \{v_1', \dots, v_n'\}$

$V = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

$(a_1, a_2, \dots, a_n)_S$ συντελεστές $(b_1, \dots, \beta_n)_{S'}$

π.χ. $\mathbb{R}^3$ $\quad S = \{V_1 = (1,1,0), V_2(0,1,1), V_3 = (0,1,0)\}$

$S' = \{u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,-1,1), V_3 = (0,1,0)\}$

$K = (e_1, e_2, e_3)$

Τυχαίο στον $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$(x,y,z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,1)$

$= (\alpha+\gamma, \alpha+\beta, \beta+\gamma)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha+\gamma \\ y &= \alpha+\beta \\ z &= \beta+\gamma \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{x+y-z}{2} \\ \gamma &= x - \frac{x+y-z}{2} \\ \beta &= y - \frac{x+y-z}{2} \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{x+y-z}{2}$, $\beta = \frac{-x+y+z}{2}$, $\gamma = \frac{x-y+z}{2}$

$(x,y,z)_u = \frac{x+y-z}{2} v_1 + \frac{-x+y+z}{2} v_2 + \frac{x-y+z}{2} v_3 \to$

$\to \left(\frac{x+y-z}{2}, \frac{-x+y+z}{2}, \frac{x-y+z}{2} \right)_S$

$(x,y,z) = \alpha' u_1 + \beta' u_2 + \gamma' u_3 = \alpha'(1,0,-1) + \beta'(0,-1,1)$
$+ \gamma'(0,1,0) = (\alpha', -\beta'+\gamma', -\alpha'+\beta')$

$x = \alpha'$
$y = -\beta' + \gamma' \Rightarrow \gamma' = y+z+x$
$z = -\alpha' + \beta' \Rightarrow \beta' = z+x$

$(x,y,z)_S = x u_1 + (z+x) u_2 + (x+y+z) u_3 \to$
$\to (x, x+z, x+y+z)_{S'}$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Ορίζουμε τον πίνακα P μετάβασης από τη S στη S'. Δηλαδή θα εκφράσουμε κάθε στοιχείο της S ως προς την S'

$V_1 = (1,1,0) = (1,1,2)_{S'} = 1u_1 + 1u_2 + 2u_3$
$V_2 = (0,1,1) = (0,1,2)_{S'} = 0u_1 + 1u_2 + 2u_3$
$V_3 = (1,0,1) = (1,2,2)_{S'} = 1u_1 + 1u_2$

Ο P δίνεται από:

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$ πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην S'

$$P\begin{pmatrix}\frac{x+y-z}{2}\\\frac{-x+y+z}{2}\\\frac{x-y+z}{2}\end{pmatrix}_S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+y-z\\-x+y+z\\x-y+z\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x\\x+x-z-x+y+z+2x-2y+2z\\2x+2y-2z-2x+2y+2z+2z+2x-2y+2z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x\\2x+2z\\2x+2y+2z\end{pmatrix}_{S'}$$

$$(x,y,z)_u=xu_1+(z+x)u_2+(x+y+z)u_3\to(x,x+z,x+y+z)_{S'}$$

Ορίζουμε την P' από την S' στην S με τον ίδιο τρόπο. Θα εκφράσουμε κάθε στοιχείο της S' ως προς τα στοιχεία της S

$$(1,0,-1)=(1,-1,0)_S \quad (0,-1,1)=(-1,0,1)_S$$

$$(0,1,0)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)_S$$

$$P'=\begin{pmatrix}1&-1&1/2\\-1&0&1/2\\0&1&-1/2\end{pmatrix} \qquad P'\begin{pmatrix}x\\x+z\\x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x+y-z}{2}\\\frac{-x+y+z}{2}\\\frac{x-y+z}{2}\end{pmatrix}_S$$

$P'=P^{-1}$ και $P=(P')^{-1}$ Δηλαδή είναι αντίστροφα.

$V \xrightarrow{\text{Ταυτοτική}} V$ → το γινόμενο τους ίσο με ταυτοτικό

$S \xrightarrow[\text{από τους } S \text{ στου } S']{P \text{ πίνακας μετάβασης}} S' \xrightarrow{P^{-1}} S$ άρα είναι αντίστροφοι

Πίνακας μετάβασης

Έστω V^n ένας δ.χ. και $S=(v_1, \dots, v_n)$ και $S'=(u_1,\dots,u_n)$ δύο διατεταγμένες βάσεις. Αν $(a_1,\dots,a_n)_S$ είναι αναπαράσταση ενός διανύσματος ως προς την S', τότε $\exists$ ο πίνακας μετάβασης P ώστε $P\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Ο P δημιουργείται ως εξής: Γράφουμε κάθε στοιχείο της βάσης του S'. Τους συντελεστές των αναπαραστάσεων για το κάθε στοιχείο τους κάνουμε στήλη για τον P.